

DOI: 10.7641/CTA.2013.30985

## 基于干扰抑制控制的飞行器姿态跟踪

王璐, 苏剑波<sup>†</sup>

(上海交通大学 自动化系; 系统控制与信息处理教育部重点实验室, 上海 200240)

**摘要:** 本文针对飞行器姿态跟踪控制问题, 考虑系统的内部模型不确定性和外界扰动, 设计了使跟踪误差一致最终有界的控制器. 以四元数为姿态参数, 建立系统的非线性误差模型; 将控制系统分为内环观测器和外环控制器分别设计, 其中, 线性扩张状态观测器作为系统内环将实际系统补偿为标称模型, 而外环非线性控制器则用于镇定非线性标称系统. 最后, 利用Lyapunov理论得到了一致最终有界的稳定性结论, 并基于频域理论, 分析了线性扩张状态观测器阶次对系统性能的影响. 姿态跟踪实验表明, 本文设计的控制系统能够有效实现飞行器的姿态跟踪控制.

**关键词:** 飞行器; 姿态跟踪控制; 线性扩张状态观测器; 非线性反馈控制; 一致最终有界

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Attitude tracking of aircraft based on disturbance rejection control

WANG Lu, SU Jian-bo<sup>†</sup>

(Department of Automation; Key Laboratory of System Control and Information Processing, Ministry of Education, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** This paper studies the attitude tracking control problem of an aircraft. With the consideration of internal uncertainties of system and external disturbances, the controller proposed stabilizes the system to be uniformly ultimately bounded (UUB). Firstly, the error model of attitude tracking objective is established based on quaternion. Then, the control system is divided into inner loop of observer and outer loop of controller, respectively. The system model is compensated into the nominal one by a linear extended state observer (ESO). A controller is hence designed for the compensated system to achieve desired performance, whose UUB stability is proven by Lyapunov theorem. Meanwhile, the performance of linear ESO is analyzed in frequency domain. Experimental results show that the proposed control scheme can accomplish the task of attitude tracking successfully and effectively.

**Key words:** aircraft; attitude tracking control; linear extended state observer (ESO); nonlinear feedback control; uniformly ultimately bounded (UUB)

### 1 引言(Introduction)

近年来, 飞行器的研究与应用受到了广泛关注. 飞行器由于能够被广泛应用于空中侦察、交通管理、森林防火、城市巡逻等领域而受到了学术研究领域的重视. 作为飞行器控制系统的内环, 姿态控制系统的效果直接决定了飞行器执行任务的性能. 飞行器的姿态控制效果会受到许多不确定因素的影响, 飞行器的参数如转动惯量、质量很难被直接测量或精确辨识, 执行机构的输出可能与期望值存在不确定性误差, 飞行器在飞行过程中会受到复杂的空气动力学扰动, 因此, 高性能、高精度的控制方法具有很强的应用价值. 目前, 在这一领域有许多方法被研究人员所应用, 例如, 反馈控制<sup>[1-2]</sup>、滑模控制<sup>[3]</sup>、自适应控制<sup>[4]</sup>、干扰观测器<sup>[5]</sup>、神经网络<sup>[6]</sup>等. 总的来说, 大部分已有研究成果重点考虑了控制方法的分析. 然而, 一部分控制方法

由于其固有的局限性, 很难应用于实际系统, 如滑模控制的抖振现象, 神经网络权值的训练速度等; 并且, 以上方法大多在时域下对系统进行分析和设计, 忽略了系统的频域特性, 导致当存在噪声、振动等因素下, 此类方法很难被应用于实际系统.

韩京清提出的自抗扰控制(active disturbance rejection control, ADRC)方法是一种估计和补偿系统不确定性的有效手段. 扩张状态观测器(extended state observer, ESO)是ADRC的重要组成部分, 该观测器将系统的内部不确定性和外界扰动作为系统的总扰动进行处理, 通过系统的输入和输出数据对总扰动进行估计, 并在控制器中进行补偿<sup>[7-8]</sup>. 传统ADRC方法需要选取的参数过多, 很难给出其参数整定方法. 针对这一问题, 高志强等提出了线性ADRC方法. 该方法控制器参数较少, 且具有明确的物理含义, 便于工程

收稿日期: 2013-09-18; 收修稿日期: 2013-11-06.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: jbsu@sjtu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60935001, 61221003).

应用<sup>[9]</sup>. 目前, ADRC的相关技术已经被成功应用于机器人视觉伺服<sup>[10]</sup>、电机转速控制<sup>[11]</sup>、工业过程控制<sup>[12]</sup>、稳定平台控制<sup>[13]</sup>等领域, 获得了良好的控制效果.

针对以上分析, 本文将线性ESO与传统非线性控制方法相结合, 用于解决存在模型不确定情况下飞行器的姿态跟踪控制问题. 首先, 考虑欧拉角存在的奇异现象, 使用四元数对系统姿态进行描述, 并针对飞行器姿态跟踪控制问题, 建立系统的非线性误差模型. 其次, 考虑到机械系统的扰动以及模型不确定性对系统带来的影响大多作用在动力学模型上, 针对系统动力学模型设计线性ESO, 将存在模型内部不确定性和外部扰动的动力学模型补偿为标称模型, 进而设计反馈控制器镇定标称系统, 实现飞行器对于期望姿态的跟踪. 最后, 利用Lyapunov理论得到系统的一致最终有界(uniformly ultimately bounded, UUB)稳定性结论, 且分析了线性ESO阶次对系统性能的影响.

## 2 系统模型和问题阐述(System model and problem statement)

### 2.1 系统模型(System model)

飞行器控制中一共要使用两个坐标系, 地理坐标系 $\mathcal{F}_e$ , 载体坐标系 $\mathcal{F}_b$ . 使用四元数对载体姿态进行描述, 得到系统模型为<sup>[1]</sup>

$$\begin{cases} \dot{q}_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}(q_0I_3 + [\mathbf{q}\times])\boldsymbol{\omega}, \\ J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} + F\mathbf{u}, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $q_0$ 和 $\mathbf{q}$ 是单位四元数的标量和矢量部分,  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T \in \mathbb{R}^3$ , 满足约束条件 $\mathbf{q}^T\mathbf{q} + q_0^2 = 1$ ;  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ 表示载体的角速度,  $I_3$ 为三阶单位矩阵; 载体的转动惯量矩阵 $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 是正定且对称的;  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T \in \mathbb{R}^3$ 为系统的控制量输入,  $F$ 是一个三阶矩阵,  $F\mathbf{u}$ 是作用在飞行器动力学模型上的转矩. 本文考虑满足完整驱动条件的飞行器模型, 此时, 矩阵 $F$ 是可逆的. 算子 $[\cdot \times]$ 表示向量的反对称矩阵, 对于 $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T \in \mathbb{R}^3$ , 其反对称矩阵为

$$[\mathbf{q}\times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 2.2 问题阐述(Problem statement)

考虑飞行器的姿态跟踪控制问题. 期望姿态信息为 $[\mathbf{q}_d \ \boldsymbol{\omega}_d \ \dot{\boldsymbol{\omega}}_d]$ , 包含飞行器的期望四元数, 期望角速度和期望角加速度信息. 并假设期望角加速度是有界的.

载体坐标系 $\mathcal{F}_b$ 到期望姿态的四元数误差和角速度

误差为<sup>[1]</sup>

$$\begin{cases} \tilde{q}_0 = q_{d0}q_0 + \mathbf{q}_d^T\mathbf{q}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = q_{d0}\mathbf{q} - q_0\mathbf{q}_d + \mathbf{q} \times \mathbf{q}_d, \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} - \tilde{R}\boldsymbol{\omega}_d, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\tilde{R} = RR_d^T$ 是姿态误差矩阵. 姿态矩阵 $R \in SO(3)$ 是一个三阶正交矩阵:

$$R = (q_0^2 - \mathbf{q}^T\mathbf{q})I_3 + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_0[\mathbf{q}\times]. \quad (3)$$

由角速度误差的定义, 能够得到如下的飞行器姿态误差模型为<sup>[14]</sup>

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}}_0 = -\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2}(\tilde{q}_0I_3 + [\tilde{\mathbf{q}}\times])\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} = J^{-1}[-(\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{R}\boldsymbol{\omega}_d) \times J(\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{R}\boldsymbol{\omega}_d) + F\mathbf{u}] - (\tilde{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - [\tilde{\boldsymbol{\omega}}\times]\tilde{R}\boldsymbol{\omega}_d). \end{cases} \quad (4)$$

考虑存在内部模型不确定性和外界扰动时的飞行器模型. 假设飞行器转动惯量的标称值为 $J_0$ , 转动惯量误差为 $\Delta J = J - J_0$ . 矩阵 $F$ 的标称值为 $F_0$ , 其误差为 $\Delta F = F - F_0$ . 则利用反馈线性化

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + F_0^{-1}L(\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{R}\boldsymbol{\omega}_d)J_0^* + F_0^{-1}J_0(\tilde{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - [\tilde{\boldsymbol{\omega}}\times]\tilde{R}\boldsymbol{\omega}_d), \quad (5)$$

可以将系统动力学模型转变为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} = J_0^{-1}F_0\mathbf{v} + J_0^{-1}F_0(\mathbf{d} + \mathbf{f}). \quad (6)$$

式(5)中 $L(\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{R}\boldsymbol{\omega}_d)J_0^* = (\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{R}\boldsymbol{\omega}_d) \times J_0(\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{R}\boldsymbol{\omega}_d)$ . 外部扰动 $\mathbf{d}$ 有界且上确界为 $\bar{d}$ .  $\mathbf{f}$ 是系统的内部不确定性, 可以表述为如下形式:

$$\mathbf{f} = -[\delta\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} + L(\tilde{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{R}\boldsymbol{\omega}_d)\delta^* + \delta(\tilde{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - [\tilde{\boldsymbol{\omega}}\times]\tilde{R}\boldsymbol{\omega}_d)], \quad (7)$$

其中 $\delta \triangleq (FF_0)^{-1}(F_0\Delta J - \Delta FF_0)$ .

此时, 系统的控制目标变为设计控制器使误差系统稳定至平衡点( $\tilde{\mathbf{q}} = 0, \tilde{\boldsymbol{\omega}} = 0$ ). 由姿态矩阵的正交性可知, 当且仅当 $\tilde{\mathbf{q}} = 0$ 时有 $\tilde{R} = I_3$ . 由 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 的定义知, 当 $\tilde{R} = I_3$ 且 $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = 0$ 时有 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_d$ . 这表明镇定误差系统与系统跟踪期望姿态是等价的.

## 3 控制系统设计(Control system design)

### 3.1 控制目标(Control objective)

考虑到机械系统的扰动以及模型不确定性对系统的影响大多作用在动力学模型上, 而根据物理规律得到的系统运动学模型总是精确的, 我们将整个控制系统分为针对系统动力学模型的内环和整个闭环反馈系统的外环分别进行设计. 对于内环系统, 考虑模型的内部不确定性和外部扰动, 使用一个线性ESO对系统总的确定性进行估计, 并在控制器中进行补偿,

从而将飞行器动力学系统转化为标称模型. 进而, 设计一个非线性反馈控制器镇定标称系统, 从而实现飞行器对于期望姿态的快速、精确跟踪. 控制系统的结构如图1所示.

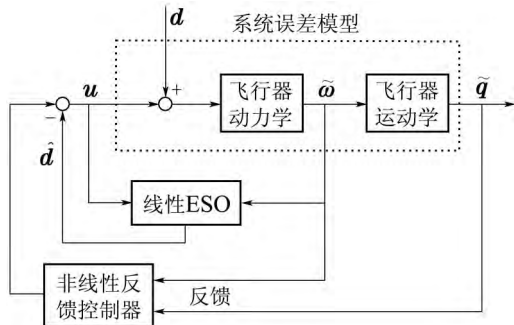


图 1 控制系统框图

Fig. 1 Framework of the control system

### 3.2 线性ESO设计(Design of linear ESO)

作用在系统动力学模型上的系统内部不确定性和外部扰动会影响系统的控制性能, 甚至导致系统不稳定, 而ESO能够将这些不确定性作为一个扩张状态进行估计, 并在控制器中补偿. 这里, 定义如下的系统复合扰动:

$$\mathbf{d}'(t) = J_0^{-1} F_0 (\mathbf{d} + \mathbf{f}). \quad (8)$$

此时, 系统可以被写为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\omega}} = J_0^{-1} F_0 \mathbf{v} + \mathbf{d}', \\ \dot{\mathbf{d}}' = \mathbf{h}(t), \end{cases} \quad (9)$$

其中 \$\mathbf{h}(t)\$ 为复合扰动 \$\mathbf{d}'(t)\$ 的一阶导数.

设计如下的二阶线性ESO:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = J_0^{-1} F_0 \mathbf{v} + \hat{z}_2 + g_1 (\tilde{\omega} - \hat{z}_1), \\ \dot{\hat{z}}_2 = g_2 (\tilde{\omega} - \hat{z}_1). \end{cases} \quad (10)$$

将式(9)代入式(10), 进而对式(10)进行拉氏变换, 得

$$\begin{cases} s\hat{z}_1 = (\hat{z}_2 - \mathbf{d}') + s\tilde{\omega} + g_1 (\tilde{\omega} - \hat{z}_1), \\ s\hat{z}_2 = g_2 (\tilde{\omega} - \hat{z}_1). \end{cases} \quad (11)$$

通过解式(11), 得复合扰动 \$\mathbf{d}'\$ 到 \$\hat{z}\_2\$ 的传递函数为

$$\hat{z}_2 = \frac{g_2}{s^2 + g_1 s + g_2} \mathbf{d}', \quad (12)$$

其中观测器增益系数 \$g\_1\$ 和 \$g\_2\$ 的选取须使分母多项式 \$s^2 + g\_1 s + g\_2\$ 是Hurwitz的. 这里, 根据文献[9]选择 \$g\_1 = 2\omega\_0\$, \$g\_2 = \omega\_0^2\$.

### 3.3 控制器设计(Controller design)

利用线性ESO估计得到的系统复合扰动 \$\hat{z}\_2\$, 可设计飞行器的输入转矩 \$\mathbf{u}\$, 从而获得期望的姿态跟踪性能.

使用反步法设计飞行器的非线性姿态跟踪控制器. 定义如下的状态变量为: \$\tilde{\Omega} = \tilde{\omega} + k\_1 \tilde{q}\$.

此时系统的微分方程为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}}_0 = -\frac{1}{2} \tilde{q}^T (\tilde{\Omega} - k_1 \tilde{q}), \\ \dot{\tilde{q}} = \frac{1}{2} (\tilde{q}_0 I_3 + [\tilde{q} \times]) (\tilde{\Omega} - k_1 \tilde{q}), \\ \dot{\tilde{\Omega}} = J_0^{-1} F_0 \mathbf{v} + \mathbf{d}' + \frac{k_1}{2} (\tilde{q}_0 I_3 + [\tilde{q} \times]) (\tilde{\Omega} - k_1 \tilde{q}). \end{cases} \quad (13)$$

设计如下的系统控制输入:

$$\mathbf{v} = -F_0^{-1} J_0 \hat{z}_2 - [k_2 + \frac{k_1}{2} F_0^{-1} J_0 (\tilde{q}_0 I_3 + [\tilde{q} \times])] \tilde{\omega} - (1 + k_1 k_2) \tilde{q}. \quad (14)$$

其中 \$k\_1, k\_2\$ 是正常数.

由式(5), 得到系统最终的控制输入为

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & -F_0^{-1} J_0 \hat{z}_2 - [k_2 + \frac{k_1}{2} F_0^{-1} J_0 (\tilde{q}_0 I_3 + [\tilde{q} \times])] \tilde{\omega} - \\ & (1 + k_1 k_2) \tilde{q} + F_0^{-1} L (\tilde{\omega} + \tilde{R} \omega_d) J_0^* + \\ & F_0^{-1} J_0 (\tilde{R} \dot{\omega}_d - [\tilde{\omega} \times] \tilde{R} \omega_d). \end{aligned} \quad (15)$$

定义一个如下的Lyapunov函数:

$$V_1 = [(1 - \tilde{q}_0)^2 + \tilde{q}^T \tilde{q}] + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}^T (F_0^{-1} J_0) \tilde{\Omega}. \quad (16)$$

计算该Lyapunov函数对于时间的导数, 并将式(13)代入, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -2(1 - \tilde{q}_0) \dot{\tilde{q}}_0 + 2\tilde{q}^T \dot{\tilde{q}} + \tilde{\Omega}^T (F_0^{-1} J_0) \dot{\tilde{\Omega}} = \\ & (1 - \tilde{q}_0) \tilde{q}^T (\tilde{\Omega} - k_1 \tilde{q}) + \tilde{q}^T (\tilde{q}_0 I_3 + \\ & [\tilde{q} \times]) (\tilde{\Omega} - k_1 \tilde{q}) + \tilde{\Omega}^T [-\tilde{q} - k_2 (\tilde{\omega} + k_1 \tilde{q}) - \\ & F_0^{-1} J_0 \hat{z}_2 + F_0^{-1} J_0 \mathbf{d}']. \end{aligned} \quad (17)$$

定义线性ESO的扰动估计误差为 \$\tilde{\mathbf{d}} \triangleq \mathbf{d}' - \hat{z}\_2\$, 并由 \$\tilde{q}^T [\tilde{q} \times] = 0\$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -k_1 \tilde{q}^T \tilde{q} + \tilde{q}^T \tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}^T \tilde{q} - k_2 \tilde{\Omega}^T \tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}^T F_0^{-1} J_0 \tilde{\mathbf{d}} \leq \\ & -k_1 \|\tilde{q}\|^2 - k_2 \|\tilde{\Omega}\|^2 + \lambda_{\max}(F_0^{-1} J_0) \|\tilde{\Omega}\| \|\tilde{\mathbf{d}}\|. \end{aligned} \quad (18)$$

如果假设线性ESO的扰动估计误差为整个闭环系统的输入, 则无激励系统在平衡点是指数稳定的.

### 3.4 稳定性分析(Stability analysis)

分别考虑同时存在外部扰动和内部模型不确定性, 以及仅存在外部扰动时系统的稳定性, 并分析外部扰动和内部不确定性对系统稳定性带来的影响.

**定理 1** 考虑式(4)所述的飞行器系统姿态误差模型, 考虑系统的外部扰动和内部不确定性, 设计式(10)和(15)所述的线性ESO和非线性反馈控制器, 则系统的四元数跟踪误差 \$\tilde{q}\$, 角速度跟踪误差 \$\tilde{\omega}\$ 和扰

动估计误差 $\tilde{\mathbf{d}}$ 是UUB的.

证 根据定义知扰动的估计误差为

$$\tilde{\mathbf{d}} = \frac{s^2 + g_1 s}{s^2 + g_1 s + g_2} \mathbf{d}', \quad (19)$$

则线性ESO的状态空间实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{d}', \\ \tilde{\mathbf{d}} = C\mathbf{x} + D\mathbf{d}', \end{cases} \quad (20)$$

其中:  $A = \begin{bmatrix} 0 & -g_2 \\ 1 & -g_1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -g_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $C = [0 \ 1]$ ,  $D = 1$ .

考虑到 $\det(sI_3 - A) = s^2 + g_1 s + g_2$ , 而 $A$ 是Hurwitz矩阵. 因此, 对于任意正定对称矩阵 $Q$ , 存在一个正定对称矩阵 $P$ 满足 $PA + A^T P = -Q$ .

定义一个新的Lyapunov函数 $V_2 = V_1 + \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ , 该Lyapunov函数对时间的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -k_1 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 - k_2 \|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\|^2 + \lambda_{\max}(F_0^{-1} J_0) \|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\| \|\tilde{\mathbf{d}}\| - \\ & \lambda_{\min}(Q) \|\mathbf{x}\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)\lambda_{\max}(B) \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{d}'\|. \end{aligned} \quad (21)$$

由于 $\tilde{R}$ ,  $\omega_d$ 和 $\dot{\omega}_d$ 均为有界变量, 因此, 复合扰动 $\mathbf{d}'$ 对于输入 $\tilde{\omega}$ 是 $\mathcal{L}$ 稳定的, 即一定存在一个 $\mathcal{K}$ 类函数 $\alpha(\cdot)$ 和正常数 $\eta$ 使 $\|\mathbf{d}'\| \leq \alpha(\|\tilde{\omega}\|) + \eta$ . 由 $\mathbf{d}'$ 的定义知, 该复合扰动中除 $L(\tilde{\omega} + \tilde{R}\omega_d)$ 以外的分量对于输入 $\tilde{\omega}$ 是有限增益 $\mathcal{L}$ 稳定的, 即该部分的上界可以被一个关于 $\|\tilde{\omega}\|$ 的一次函数所包含. 由算子 $L(\cdot)$ 的定义知, 包含 $L(\tilde{\omega} + \tilde{R}\omega_d)$ 的部分经过不等式缩放后, 用于限制 $\mathbf{d}'$ 的不等式右边将会出现 $\|\tilde{\omega}\|$ 的二次方项. 又由于变量 $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ 是 $\tilde{\omega}$ 的微分同胚映射, 因此, 一定存在正常数 $a_1, a_2, a_3$ 使如下不等式成立:

$$\|\mathbf{d}'\| \leq a_1 \|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\| + a_2 \|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\|^2 + a_3. \quad (22)$$

将式(22)代入式(21), 得到

$$\dot{V}_2 \leq -k_1 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 - c_1 \|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\|^2 - c_2 \|\mathbf{x}\|^2 + \mu, \quad (23)$$

其中:

$$\begin{aligned} c_1 = & k_2 - a_1 \lambda_{\max}(F_0^{-1} J_0) - \\ & \frac{\lambda_{\max}(F_0^{-1} J_0) \lambda_{\max}(C)}{2\lambda_1} - \\ & a_2 \lambda_{\max}(F_0^{-1} J_0) \|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\| - \\ & \frac{[a_3 \lambda_{\max}(F_0^{-1} J_0)]^2}{4\mu_1} - \\ & \frac{a_1 \lambda_{\max}(P) \lambda_{\max}(B)}{\lambda_2} - \\ & \frac{a_2 \lambda_{\max}(P) \lambda_{\max}(B)}{\lambda_3} \|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\|^2, \\ c_2 = & \lambda_{\min}(Q) - \frac{\lambda_1 \lambda_{\max}(F_0^{-1} J_0) \lambda_{\max}(C)}{2} - \\ & 2\lambda_{\max}(P) \lambda_{\max}(B) \lambda_{\max}(C) - \end{aligned}$$

$$\frac{(a_1 \lambda_2 + a_2 \lambda_3) \lambda_{\max}(P) \lambda_{\max}(B) - [a_3 \lambda_{\max}(P) \lambda_{\max}(B)]^2}{\mu_2},$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ 为正常数.

假设 $\Omega_0 > \sqrt{\mu/c_1}$ 是使 $c_1 > 0$ 的 $\|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\|$ 的上界, 则对于初始的 $\|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(t_0)\| < \Omega_0$ . 当不等式 $\|\tilde{\mathbf{q}}\| > \sqrt{\mu/k_1}$ 或 $\|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\| > \sqrt{\mu/c_1}$ 或 $\|\mathbf{x}\| > \sqrt{\mu/c_2}$ 成立时,  $\dot{V}$ 是严格负定的. 此时, 可以得到状态 $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ 和 $\mathbf{x}$ 是有界的且能收敛至一个紧集内. 由于 $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\boldsymbol{\Omega}})$ 是 $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\omega})$ 的线性微分同胚映射, 因此,  $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\omega})$ 能够收敛到一个紧集内, 系统状态是UUB的.

**定理 2** 如果系统仅受到外部有界扰动, 而不存在模型参数摄动的影响, 则设计的线性ESO和非线性反馈控制器能够使姿态误差系统在平衡点处是全局指数稳定的.

证 如果不存在模型参数摄动, 则内部不确定性 $\mathbf{f}$ 等于一个零向量. 此时, 仍考虑式(20)所述的线性ESO状态空间实现, 对于初始状态 $\mathbf{z}(0)$ , 系统状态满足

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{d} \mathbf{d} \tau. \quad (24)$$

外界扰动 $\mathbf{d}$ 是有界常数, 则线性ESO的输出为

$$\hat{\mathbf{z}}_2 = C e^{At} (\mathbf{x}(0) + A^{-1} B \mathbf{d}) - C e^{At} e^{-At} A^{-1} B \mathbf{d}. \quad (25)$$

由式(12)知,  $\mathbf{d}$ 到扰动的估计值 $\hat{\mathbf{z}}_2$ 的直流增益为1, 则有 $-CA^{-1}B = 1$ . 因此, 得到

$$\tilde{\mathbf{d}} = -C e^{At} (\mathbf{x}(0) + A^{-1} B \mathbf{d}), \quad (26)$$

即对 $\forall \mathbf{x}(0)$ , 选择

$$\begin{cases} c_3 = b_0 \|C\| + b_0 \bar{d} / \|\mathbf{x}(0)\|, \\ \lambda_{\max}(A) < \lambda < 0, \end{cases} \quad (27)$$

满足

$$\|\tilde{\mathbf{d}}\| \leq c_3 \|\mathbf{x}(0)\| e^{\lambda t}. \quad (28)$$

由于矩阵 $A$ 是Hurwitz的, 因此 $\tilde{\mathbf{d}}$ 能够指数收敛到0. 由Lyapunov逆定理<sup>[15]</sup>, 存在一个Lyapunov函数 $V_{\tilde{\mathbf{d}}}$ 满足

$$b_1 \|\tilde{\mathbf{d}}\|^2 \leq V_{\tilde{\mathbf{d}}} \leq b_2 \|\tilde{\mathbf{d}}\|^2, \quad (29)$$

$$\dot{V}_{\tilde{\mathbf{d}}} \leq -b_3 \|\tilde{\mathbf{d}}\|^2. \quad (30)$$

由于 $\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq 1$ , 有 $\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \leq [(1 - \tilde{q}_0)^2 + \tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{q}}] \leq 2\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2$ . 定义一个Lyapunov函数 $V_3 = V_1 + \Gamma V_{\tilde{\mathbf{d}}}$ , 其中 $\Gamma = 1/\lambda_{\min}(k_2) b_3$ . 由 $V_3$ 的定义知

$$\begin{aligned} & b_4 (\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{d}}\|^2) \leq \\ & V_3 \leq b_5 (\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{d}}\|^2), \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\begin{cases} b_4 = \min\{1, \frac{\lambda_{\min}(F_0^{-1}J_0)}{2}, \Gamma b_1\}, \\ b_5 = \max\{2, \frac{\lambda_{\max}(F_0^{-1}J_0)}{2}, \Gamma b_2\}. \end{cases} \quad (32)$$

进而,  $V_3$ 对时间的导数可以写为

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -k_1\|\tilde{q}\|^2 - k_2\|\tilde{\Omega}\|^2 + \|\tilde{\Omega}\|\|\tilde{d}\| - \Gamma b_3\|\tilde{d}\|^2 \leq \\ & -b_6(\|\tilde{q}\|^2 + \|\tilde{\Omega}\|^2) - \frac{1}{2\lambda_{\min}(k_2)}\|\tilde{d}\|^2 \leq -b_7V_3, \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\begin{cases} b_6 = \min\{k_1, \frac{k_2}{2}\}, \\ b_7 = \frac{1}{b_5} \min\{b_6, \frac{\Gamma b_3}{2}\}. \end{cases} \quad (34)$$

因此, 设计的线性ESO和非线性反馈控制器能够使姿态误差系统指数稳定至平衡点.

由以上两个定理可知, 当系统存在外部有界扰动时, 在线性ESO的作用下, 仍能够得到全局指数稳定的结论. 而当系统存在内部不确定时, 系统由全局指数稳定变为UUB. 可见, 系统的内部不确定性由于受到系统状态的作用, 将对稳定性产生较大的影响.

#### 4 ESO 性能分析 (Performance analysis of ESO)

由式(12)所示的线性ESO频率特性可知, 线性ESO的输入输出描述与目前被广泛使用的干扰观测器 (disturbance observer, DOB)是相同的. 其中, 式(12)中的系统总扰动到扰动的估计值的传递函数与DOB系统中广泛使用的二项系数型 $Q$ 滤波器等价, 二者均能够估计扰动中低频的分量, 并对系统中存在的高频噪声, 振动加以抑制. 这里, 使用频域的方法研究线性ESO的阶次选取对系统性能的影响.

传统ESO将系统的未知不确定性作为扩张状态并写进系统的状态方程, 而扩张状态(即系统的不确定性)的一阶导数作为系统的扰动项存在. 此时, 含有扩张状态的系统矩阵 $A$ 的阶次比原系统高一阶, 而分子仅为一个常数. 然而, 对于这样一个固定形式观测器而言, 其对于扰动、噪声的抑制效果, 响应速度以及对于模型不确定性的鲁棒性等性能都是受到极大的约束的, 我们仅能够通过调节线性ESO的截止频率来实现ESO性能的改变. 这里, 进一步分析当线性ESO阶次发生改变时(如: 比原系统的阶次高二阶甚至更多), 线性ESO的性能将会如何改变.

假设系统总扰动的二阶和三阶导数分别为

$$\begin{cases} \ddot{d} = h_1(t), \\ \dddot{d} = h_2(t). \end{cases} \quad (35)$$

针对以上两种情况, 仍将系统写为积分形式的状态空间实现, 并设计三阶线性ESO为

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = J_0^{-1}F_0v + \hat{z}_2 + 3\omega_1(\tilde{\omega} - \hat{z}_1), \\ \dot{\hat{z}}_2 = \hat{z}_3 + 3\omega_1^2(\tilde{\omega} - \hat{z}_1), \\ \dot{\hat{z}}_3 = \omega_1^3(\tilde{\omega} - \hat{z}_1). \end{cases} \quad (36)$$

四阶线性ESO为

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = J_0^{-1}F_0v + \hat{z}_2 + 4\omega_2(\tilde{\omega} - \hat{z}_1), \\ \dot{\hat{z}}_2 = \hat{z}_3 + 6\omega_2^2(\tilde{\omega} - \hat{z}_1), \\ \dot{\hat{z}}_3 = \hat{z}_4 + 4\omega_2^3(\tilde{\omega} - \hat{z}_1), \\ \dot{\hat{z}}_4 = \omega_2^4(\tilde{\omega} - \hat{z}_1). \end{cases} \quad (37)$$

与式(11)类似, 通过拉氏变换得到式(10)(36)–(37)所述3个线性ESO从系统总扰动到扰动估计值的传递函数为

$$\begin{cases} \hat{z}_2 = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0s + \omega_0^2}d', \\ \hat{z}_2 = \frac{3\omega_1^2s + \omega_1^3}{s^3 + 3\omega_1s^2 + 3\omega_1^2s + \omega_1^3}d', \\ \hat{z}_2 = \frac{6\omega_2^2s^2 + 4\omega_2^3s + \omega_2^4}{s^4 + 4\omega_2s^3 + 6\omega_2^2s^2 + 4\omega_2^3s + \omega_2^4}d'. \end{cases} \quad (38)$$

记二阶、三阶和四阶线性ESO从系统总扰动到扰动估计值的传递函数分别为 $Q_1(s)$ ,  $Q_2(s)$ 和 $Q_3(s)$ . 可以看出, 这3个滤波器的相对阶次均为二阶, 即比原系统阶次高一阶. 由于线性ESO的输入输出描述与DOB等价, 因此, 直接使用DOB鲁棒稳定性的条件进行判断. 假设 $\Delta(s)$ 是系统乘性不确定性的上界, 则系统鲁棒稳定的必要条件为:

$$\|Q(s)\Delta(s)\|_{\infty} < 1, \quad (39)$$

其中 $Q(s)$ 为系统总扰动到扰动估计值的传递函数. 则根据上式知,  $Q(s)$ 在某一频段上较高的幅值有可能使系统无法满足鲁棒稳定的条件.

取上述3个线性ESO的截止频率均为1 rad/s, 得到 $Q(s)$ 的频率响应如图2所示.

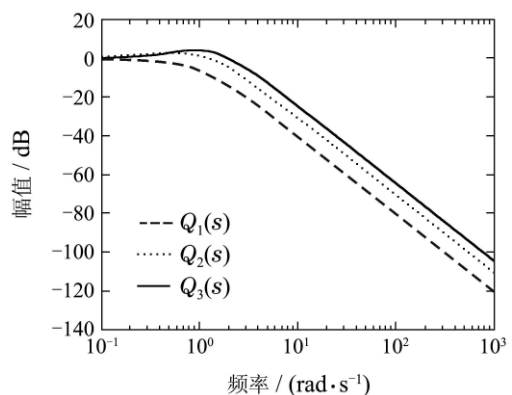


图 2  $Q(s)$ 的频率响应

Fig. 2 Frequency response of  $Q(s)$

由图2可知,在线性ESO阶次提高而截止频率不变的情况下,  $Q(s)$ 在中频和高频段的增益将会增大. 由式(39)知,  $Q(s)$ 在中频和高频段增益的提高会降低系统的鲁棒性,且由于系统高频增益提高,观测器对于高频噪声的抑制能力减弱,高频噪声将会对系统造成更加显著的影响,甚至造成系统发散.

重新取线性ESO的截止频率为:  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_1 = 0.576 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 0.407 \text{ rad/s}$ . 得到频率响应如图3-4所示,其中  $1 - Q(s)$ 决定了系统的扰动抑制性能. 由图3知,选取的截止频率能够使3个不同阶次的滤波器具有相同的高频性能,其在高频段具有相同的频率特性. 由图4中  $1 - Q(s)$ 的频率特性可以看出,在保证系统高频性能近似的情况下,低阶的线性ESO在低频段对于扰动的抑制能力明显弱于高频线性ESO. 然而在中频段,高阶线性ESO具有一个较大的高峰幅值,这会导致阶跃响应产生较大的超调量或振荡,而在实际系统中,有可能导致整个闭环系统发散. 通过观察  $Q(s)$ 的频率特性可以看出,高阶线性ESO在中频段的高峰幅值会降低系统在该频段的鲁棒稳定性. 对于一类在此频段上模型不确定性较大的系统,需要极大地牺牲系统的扰动抑制性能,才能保证系统的鲁棒性.

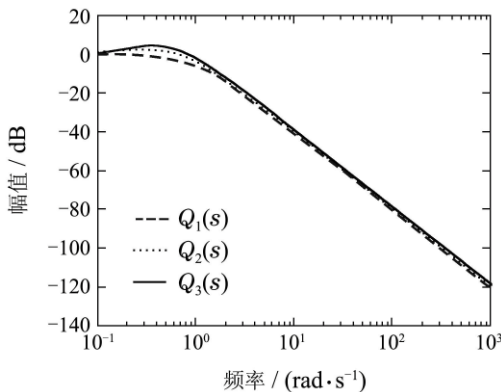


图3 截止频率不相等时  $Q(s)$  的频率响应  
Fig. 3 Frequency response of  $Q(s)$  with different cut-off frequency

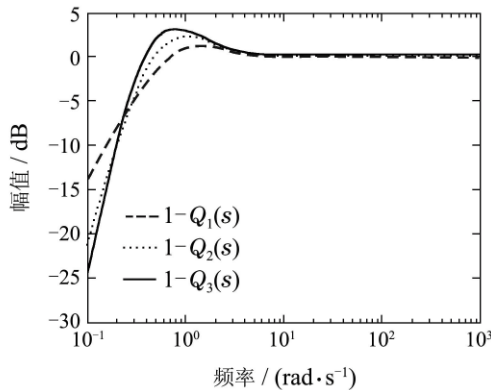


图4 截止频率不相等时  $1 - Q(s)$  的频率响应  
Fig. 4 Frequency response of  $1 - Q(s)$  with different cut-off frequency

根据以上分析,得到关于线性ESO的如下结论:

- 1) 相同的截止频率,线性ESO的鲁棒性随着阶次的提高而下降;
- 2) 高阶线性ESO具有更强的低频扰动抑制性能,但其对于高频噪声的抑制性能将会变差;
- 3) 高阶线性ESO在中频段的高峰幅值将会使系统产生较大超调,而低阶线性ESO则具有较平滑的动态响应过程.

### 5 实验验证(Experimental verification)

本节以一个四旋翼无人飞行器<sup>[2,4,14]</sup>为例,验证本文提出方法的有效性. 飞行器实验平台如图5所示.



图5 飞行器实验平台  
Fig. 5 Aircraft testbed

假设飞行器载体坐标系与地理坐标系重合时,北向所对应的电机转速为  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ 至  $\omega_4$ 为按照逆时针方向所对应的剩余3个电机转速. 定义该系统的控制输入  $\mathbf{u} = [\omega_\phi \ \omega_\theta \ \omega_\psi]^T$ ,此时,4个电机对应转速为

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_T + \omega_\theta + \omega_\psi, & \omega_2 = \omega_T + \omega_\phi - \omega_\psi, \\ \omega_3 = \omega_T - \omega_\theta + \omega_\psi, & \omega_4 = \omega_T - \omega_\phi - \omega_\psi, \end{cases} \quad (40)$$

其中  $\omega_T$ 为电机初始转速,实验中取  $\omega_T = 240 \text{ rad/s}$ .

控制转矩为

$$\mathbf{F}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} C_T \rho A r^2 l (\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ C_T \rho A r^2 l (\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ C_Q \rho A r^3 (\omega_1^2 + \omega_3^2 - \omega_2^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix}, \quad (41)$$

其中各变量的物理意义和参数见表1.

表1 飞行器参数

Table 1 Parameters of the aircraft

变量	参数	单位	描述
$C_T$	0.012		升力系数
$C_Q$	$0.93 \times 10^{-3}$		转矩系数
$\rho$	1.184	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	空气密度
$A$	0.0515	$\text{m}^2$	螺旋桨桨盘面积
$r$	0.128	m	螺旋桨半径
$l$	0.25	m	电机力臂
$J_\phi$	0.014	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	横滚轴转动惯量
$J_\theta$	0.014	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	俯仰轴转动惯量
$J_\psi$	0.024	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	航向轴转动惯量

假设  $u$  的数值远小于  $\omega_T$ , 通过将转矩计算部分在  $\omega_T$  处线性化, 得矩阵  $F$  为

$$F = \text{diag}\{4C_T\rho Ar^2 l\omega_T, 4C_T\rho Ar^2 l\omega_T, 8C_Q\rho Ar^3\omega_T\}. \quad (42)$$

其中  $\text{diag}$  表示向量的对角阵形式.

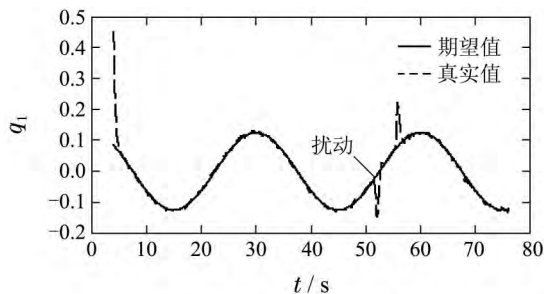
实验平台的飞行控制系统包括微处理器、惯性测量单元(inertial measurement unit, IMU)和电磁罗盘. 使用一个非线性互补滤波器对飞行器姿态和陀螺仪零偏进行估计<sup>[16]</sup>, 并对陀螺仪的角速度量测值进行修正, 以获得良好的飞行器反馈信息. 系统的检测周期为 5 ms, 微处理器执行完一次姿态估计算法后, 执行控制算法, 并根据计算得到的控制量改变电机的转速指令. 为了验证本文提出控制方法的扰动抑制性能, 在飞行器进行姿态跟踪实验的过程中, 在俯仰和横滚轴上分别加入大小为  $0.0388 \text{ N}\cdot\text{m}$  的扰动力矩, 检验控制器对于扰动力矩的抑制效果. 控制系统参数选取为:  $k_1 = \text{diag}\{16, 16, 10\}$ ,  $k_2 = \text{diag}\{85, 85, 200\}$ , 线性ESO截止频率为  $1.6 \text{ rad/s}$ .

定义系统的期望姿态为

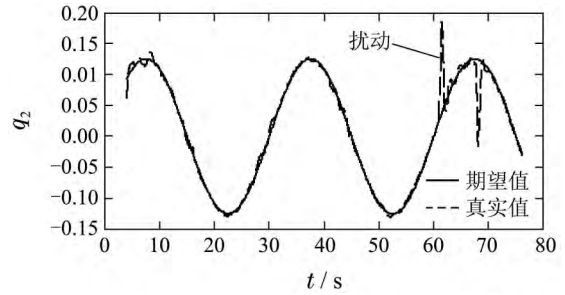
$$\begin{cases} q_{d1} = 0.125 \cos(\frac{\pi}{15}t), \\ q_{d2} = 0.125 \sin(\frac{\pi}{15}t), \\ q_{d3} = 0. \end{cases} \quad (43)$$

其中系统的期望角速度  $\omega_d$  和期望角加速度  $\dot{\omega}_d$  的解析解可由四元数的运动学模型得到.

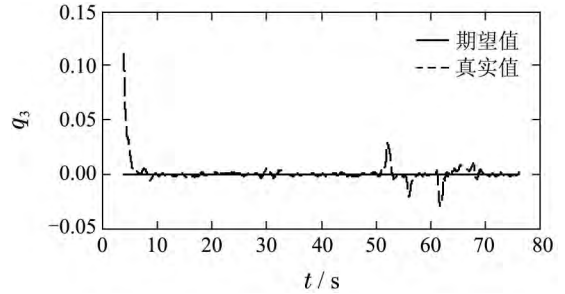
姿态跟踪效果如图6所示, 图7为姿态跟踪误差曲线. 3个自由度上姿态控制精度对比见表2. 图6表明, 当系统施加外界扰动时, 设计的线性ESO能够有效抑制和消除由外界扰动带来的影响, 其过渡过程能够在3秒内完成. 图7表明, 当使用了线性ESO对系统扰动进行估计和补偿后, 飞行器具有较高的姿态跟踪精度. 同时, 由表2可以看出, 系统的姿态控制精度与未使用线性ESO时相比有了较大幅度的提升. 实验结果表明, 本文提出的控制方法能够有效实现飞行器的姿态跟踪, 具有较高的跟踪精度. 对于外界扰动, 设计的线性ESO也具有较好的抑制效果, 且能够保证系统对于内部不确定性的鲁棒性.



(a)  $q_1$  跟踪效果



(b)  $q_2$  跟踪效果



(c)  $q_3$  跟踪效果

图 6 姿态跟踪性能

Fig. 6 Attitude tracking performance

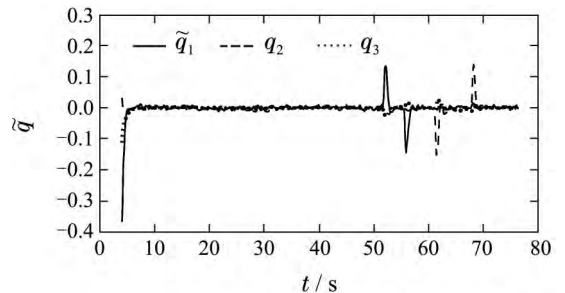


图 7 姿态跟踪误差

Fig. 7 Attitude tracking error

表 2 姿态精度对比

Table 2 Accuracy comparison of attitude

	俯仰	横滚	航向
不含ESO	$\pm 2.0^\circ$	$\pm 2.0^\circ$	$\pm 2.0^\circ$
含有ESO	$\pm 0.3^\circ$	$\pm 0.3^\circ$	$\pm 0.2^\circ$

## 6 结论(Conclusion)

本文研究了存在外部扰动和模型不确定性情况下飞行器姿态跟踪控制问题. 首先, 以四元数为姿态参数, 建立了系统的非线性误差模型; 进而, 将控制系统分为内环观测器和外环控制器分别设计, 其中一个线性ESO被作为系统内环将实际系统补偿为标称模型, 而非线性外环控制器则用于镇定非线性标称系统. 利用Lyapunov理论, 分别分析了同时存在外部扰动和内部模型不确定性以及仅存在外部扰动时系统的稳定性, 分析结果表明, 系统的内部不确定性由于受到系统状态的作用, 将对系统稳定性产生较大影响. 最

后,分析了高阶线性ESO的性能.实验结果表明,本文提出的方法能够有效实现飞行器姿态跟踪控制,且具有较高的姿态跟踪精度.

### 参考文献(References):

- [1] TAYEBI A. Unit quaternion-based output feedback for the attitude tracking problem [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(6): 1516 – 1520.
- [2] GONZÁLEZ I, SALAZAR S, TORRES J, et al. Real-time attitude stabilization of a mini-UAV quad-rator using motor speed feedback [J]. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 2013, 70(1–4): 93 – 106.
- [3] XIA Y, ZHENG Z, FU M, et al. Attitude tracking of rigid spacecraft with bounded disturbances [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011, 58(2): 647 – 659.
- [4] NICOL C, MACNAB C, RAMIREZ-SERRANO A. Robust adaptive control of a quadrotor helicopter [J]. *Mechatronics*, 2011, 21(6): 927 – 938.
- [5] WANG L, SU J. Disturbance rejection control of a morphing UAV [C] // *Proceedings of American Control Conference*. Washington, DC: IEEE, 2013, 6: 4307 – 4312.
- [6] ZOU A, KUMAR K D, HOU Z, et al. Finite-time attitude tracking control for spacecraft using terminal sliding model and chebyshev neural network [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2011, 41(4): 950 – 963.
- [7] 韩京清. 自抗扰控制技术 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2008. (HAN Jingqing. *Active Disturbance Rejection Control Technique* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2008.)
- [8] HAN J. From PID to active disturbance rejection control [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(3): 900 – 906.
- [9] ZHENG Q, DONG L, LEE D H, et al. Active disturbance rejection control for MEMS gyroscopes [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 17(6): 1432 – 1438.
- [10] SU J, MA H, QIU W, et al. Task-independent robotic uncalibrated hand-eye coordination based on the extended state observer [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2004, 34(4): 1917 – 1922.
- [11] LI S, LIU Z. Adaptive speed control for permanent-magnet synchronous motor system with variations of load inertia [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronic*, 2009, 56(8): 3050 – 3059.
- [12] 王丽君, 童朝南, 李擎, 等. 热连轧板宽板厚的实用自抗扰解耦控制 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(11): 1471 – 1478. (WANG Lijun, TONG Chaonan, LI Qing, et al. A practical decoupling control solution for hot strip width and gauge regulation based on active disturbance rejection [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(11): 1471 – 1478.)
- [13] 李锦英, 付承毓, 唐涛, 等. 运动平台上光电跟踪系统的自抗扰控制器设计 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(7): 955 – 958. (LI Jinying, FU Chengyu, TANG Tao, et al. Design of active disturbance-rejection controller for photoelectric tracking system on moving bed [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(7): 955 – 958.)
- [14] WANG L, JIA H. The trajectory tracking problem of quadrotor UAV: global stability analysis and control design based on the cascade theory [J]. *Asian Journal of Control*, 2014, 16(2): 1 – 15.
- [15] KAHLIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. Third Edition. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 2002.
- [16] MAHONY R, HAMEL T, PFLIMLIN J. Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(5): 1203 – 1218.

### 作者简介:

- 王 璐 (1987–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为非线性系统控制技术、无人飞行器系统, E-mail: wanglu1987xy@sjtu.edu.cn;
- 苏剑波 (1969–), 男, 教授, 主要研究方向为机器人控制、多传感器信息融合、机器学习与人机交互, E-mail: jbsu@sjtu.edu.cn.